

Cap 4. Dinâmica do corpo rígido; tensores e díadas

Notação Tensorial

vetores coluna/linha

$$\vec{v} : \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \quad \vec{w}^T : \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}$$

produto escalar

$$\vec{w} \cdot \vec{v} \equiv \vec{w}^T \vec{v} = \vec{v}^T \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = $$

prod. externo $\equiv$ "díada"

$$\vec{v} \vec{w} \quad \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

díada agindo em vetor

$$(\vec{v} \vec{w}) \vec{r} \equiv \vec{v} (\underbrace{\vec{w} \cdot \vec{r}}_{\text{escalar}}) = (\vec{w} \cdot \vec{r}) \vec{v} \quad \left(\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \right)$$



linearidade da ação

$$\vec{v} \vec{w} (\alpha \vec{r} + \beta \vec{s}) = [\alpha (\vec{w} \cdot \vec{r}) + \beta (\vec{w} \cdot \vec{s})] \vec{v} = \alpha (\vec{v} \vec{w}) \vec{r} + \beta (\vec{v} \vec{w}) \vec{s}$$

comb. linear de díadas (def.)

$$(\alpha \vec{v} \vec{w} + \beta \vec{r} \vec{s}) \vec{t} \equiv \alpha (\vec{v} \vec{w}) \vec{t} + \beta (\vec{r} \vec{s}) \vec{t}$$

díada agindo em vetor (linha)
pela esquerda

$$\vec{v} \cdot (\vec{w} \vec{r}) \equiv (\vec{v} \vec{w}) \cdot \vec{r} \quad \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}$$

tensor geral

$$\overleftrightarrow{T} = \sum_{ij} T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \quad \text{onde } T_{ij} = \hat{e}_i \cdot \overleftrightarrow{T} \cdot \hat{e}_j$$

identidade

$$\mathbb{1} = \sum_i \hat{e}_i \hat{e}_i$$

Transformação das componentes de um tensor [operador] sob rotações

Suponha que mudemos o ref Σ para outro Σ' de mesma origem, através da transf. ortogonal $A = [a_{ij}]$; $a_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j$

$$T'_{rs} = \hat{e}'_r \cdot T \cdot \hat{e}'_s = \sum_{ij} \hat{e}'_r (\hat{e}_i \hat{e}_j) T (\hat{e}_j \hat{e}_i) \hat{e}'_s = \sum_{ij} (\hat{e}'_r \cdot \hat{e}_i) (\hat{e}_j \cdot T \cdot \hat{e}_j) (\hat{e}_j \cdot \hat{e}'_s)$$

$$= \sum_{ij} A_{ri} T_{ij} A_{sj} = \sum_{ij} A_{ri} T_{ij} A^T_{js} = (A T A^T)_{rs}$$

$$\rightarrow \boxed{T' = A T A^T} \quad (\text{transf. de similaridade})$$

$L = A^{-1}$

Operador de rotação finita

Queremos uma expressão explícita para o operador $R_{\hat{n}}(\alpha) = \exp[\alpha \hat{n} \cdot \vec{J}]$

def: o produto vetorial entre um vetor e um tensor é um novo tensor satisfazendo

$$(\vec{V} \times \overleftrightarrow{T}) \cdot \vec{W} \equiv \vec{V} \times (\overleftrightarrow{T} \cdot \vec{W})$$

obs: notação de Dirac não é eficiente p/ produto vetorial

Conveniente usar uma base $\{\hat{e}_i\}$ tal que $\boxed{\hat{e}_3 = \hat{n}}$. Ainda dado um vetor $\vec{r}$ formando um ângulo β com $\hat{n}$, podemos escolher $\hat{e}_1$ no plano formado por $\hat{n}$ e $\vec{r}$ e

$$\boxed{\hat{e}_2 = \frac{\hat{e}_3 \times \vec{r}}{|\hat{e}_3 \times \vec{r}|} = \frac{\hat{n} \times \vec{r}}{r \sin \beta}}$$

$$\Rightarrow \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \frac{(\hat{n} \times \vec{r}) \times \hat{n}}{r \sin \beta} = \frac{\hat{n} \times (\vec{r} \times \hat{n})}{r \sin \beta} = \frac{\vec{r}(\hat{n} \cdot \hat{n}) - (\vec{r} \cdot \hat{n})\hat{n}}{r \sin \beta} = \frac{\vec{r} - \hat{n} \cos \beta r}{r \sin \beta}$$

Nessa base, o operador $R_{\hat{n}}(\alpha)$ transforma $\vec{r} = (r \sin \beta, 0, r \cos \beta)$ em $\vec{r}'$ com componentes (pto de vista ativo)

$$x' = r \sin \beta \cos \alpha \quad y' = r \sin \beta \sin \alpha \quad z' = z = r \cos \beta$$

$$\therefore \vec{r}' = (\vec{r} - \hat{n} r \cos \beta) \cos \alpha + (\hat{n} \times \vec{r}) \sin \alpha + r \cos \beta \hat{n}$$

$$\boxed{\vec{r}' = \vec{r} \cos \alpha + \hat{n} (\hat{n} \cdot \vec{r}) (1 - \cos \alpha) + (\hat{n} \times \vec{r}) \sin \alpha}$$

Comparando $\vec{r}'$ com $\vec{r}$, podemos então ver que $\vec{r}' = \vec{R}_{\hat{n}}(\alpha) \cdot \vec{r}$, onde

$$\vec{R}_{\hat{n}}(\alpha) = \cos \alpha \vec{1} + (1 - \cos \alpha) \hat{n} \hat{n} + \sin \alpha \hat{n} \times \vec{1} \quad (\text{Fórmula de Rodrigues})$$

para $\alpha = \delta\theta$ infinitesimal: $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \delta\theta$, e reobtemos

$$\vec{R}_{\hat{n}}(\alpha) \rightarrow \vec{1} + \delta\theta \hat{n} \times \vec{1} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{d\Omega} \times \vec{r}, \quad \vec{d\Omega} = \hat{n} \delta\theta$$

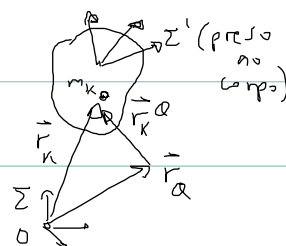
É possível também obter a expressão acima da forma exponencial

$$\vec{R}_{\hat{n}}(\alpha) = \exp[\alpha \hat{n} \cdot \vec{J}]$$

que vimos anteriormente (exercício)

Mom. angular e tensor de inércia

Recordamos inicialmente propriedades gerais do mom. angular num ref. inercial (cap I)



def: o mom. angular com respeito ao ponto Q localizado em $\vec{r}_Q$ é:

$$\vec{L}_Q \equiv \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_Q) \equiv \sum_i \vec{r}_i^{(Q)} \times \dot{\vec{r}}_i^{(Q)} m_i$$

portanto $\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_i \vec{r}_i^{(Q)} \times \frac{d\dot{\vec{r}}_i}{dt} - m_i \vec{r}_i^{(Q)} \times \ddot{\vec{r}}_Q$

$$= \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_i^{(Q)} \times \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{r}_i^{(Q)} \times \vec{F}_i^{(e)} - M(\vec{R}_{cm} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q \quad (\text{usando } \sum_i m_i \vec{r}_i \equiv M\vec{R})$$

o 1º termo pode ainda ser reescrito

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{ij} + (\vec{r}_j - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \quad (\text{usando } \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \text{ 3ª Lei de Newton})$$

Assim: $\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} + \vec{N}_Q^{(e)} - M(\vec{R}_{cm} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q$ $(\vec{N}_Q^{(e)} \equiv \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_i^{(e)})$

se, ainda por cima: i) $\vec{r}_Q = \vec{R}_{cm}$ ou $\ddot{\vec{r}}_Q = 0$ e ii) $\vec{F}_{ij} \propto \vec{r}_i - \vec{r}_j$ (forças centrais) então:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{N}_Q^{(e)}}$$